

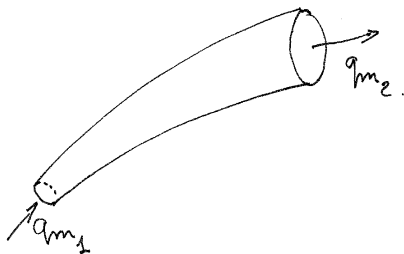
# Mécanique des fluides compressibles

## I Rappels

Nous restreindrons l'étude au cas du fluide idéal, non visqueux, en écoulement permanent unidimensionnel. Précisons :

- Fluide idéal = gaz parfait ( $p\nu=rT$ ) à  $\gamma$  constant
- Ecoulement permanent : indépendant du temps
- Unidimensionnel : toutes les grandeurs ne dépendent que d'un paramètre spatial, l'abscisse curviligne, elles sont constantes dans une section perpendiculaire à la ligne moyenne.

### I-1 PCM (Principe de Conservation de la Masse ou équation de continuité)

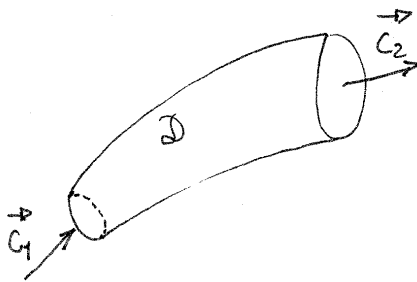


$$\boxed{qm_1 = qm_2} \text{ avec } qm = \rho SC$$

Le long d'un tube de courant le débit se conserve.

Attention : **Ne jamais utiliser le débit volumique** en mécanique des fluides compressible.

### I-2 PFD (Principe Fondamental de la Dynamique ou théorème d'Euler)

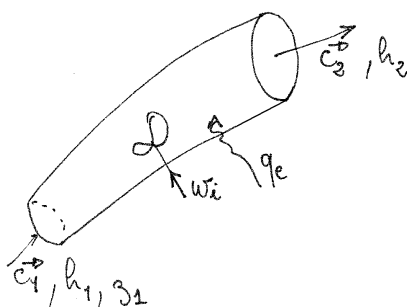


$$\boxed{\Sigma \vec{F}_{ext \rightarrow D} = qm(\vec{C}_2 - \vec{C}_1)}$$

NB :  $D$  est un domaine fluide limité par un tube de courant  $\Sigma \vec{F}_{ext \rightarrow D}$  comptabilise toutes les forces extérieures au domaine  $D$ , y compris le poids (négligeable en mécanique des fluides compressibles) et les forces de pression agissant sur les sections d'entrée et de sortie du fluide. Les

forces recherchées ne sont en général que celles agissant sur les parois (calcul de la poussée des moteurs de fusées ou des réacteurs...).

### I-3 1<sup>er</sup> principe de la thermo (conservation de l'enthalpie totale)



$$\text{Ecriture générale : } wi + qe = \Delta_{12} \left( h + \frac{1}{2} C^2 + gz \right)$$

$q_e$  est la chaleur échangée avec l'extérieur. Dans le cas qui nous préoccupe, les vitesses étant très grandes, les échanges de chaleur sont faibles par rapport aux variations d'énergie cinétique. Il en est de même de l'énergie potentielle  $gz$ .

$w_i$  est le travail indiqué donc par définition le travail fourni par les parties mobiles de la machine au domaine fluide D.

Si nous choisissons convenablement le repère c'est à dire tel que les parois soient fixes dans ce repère alors le travail indiqué est nul. Donc le premier principe se résume à :

$$\Delta_{12}(h + \frac{1}{2}C^2) = 0 \text{ donc } \boxed{h + \frac{1}{2}C^2 = cste}$$

On appelle cette somme « **enthalpie totale** ». Elle se *conserve même si l'écoulement est irréversible* (avec frottement).

#### I-4 Equations de comportement du fluide

Il s'agit ici de schématiser le comportement thermo élastique du fluide. Ces équations ne sont plus fondamentales comme les précédentes. Nous choisirons le modèle le plus simple celui du gaz idéal comme nous l'avons dit en introduction.

Equation d'état :  $\boxed{\frac{p}{\rho} = rT}$  avec  $r = \frac{R}{M}$

Fonctions d'état :

nous n'aurons besoin que de l'enthalpie :  $\boxed{h = CpT + cste}$  avec  $Cp = \frac{\gamma r}{\gamma - 1}$  et :

$\gamma = 5/3$  pour un gaz monoatomique

$\gamma = 7/5$  pour un gaz diatomique

$\gamma \approx 1,33$  pour les gaz poly atomiques

#### I-5 2<sup>ème</sup> principe

Le deuxième principe introduit la notion de réversibilité et va nous fournir la dernière équation nécessaire à la résolution d'un problème de mécanique des fluides compressibles.

$$Tds = \delta q_e + \delta q_{int}$$

$\delta q_{int}$  est la chaleur due aux forces de frottement. Nous avons émis l'hypothèse de **fluide non visqueux**, il est nécessaire aussi que **l'écoulement soit sans onde de choc** (voir § IV) pour que l'évolution soit réversible et que cette chaleur soit nulle.

Donc, comme nous avons négligé  $q_e$  au § I-3, il en résulte que :  $Tds = 0$

En cours de thermo, nous avons démontré que cette équation conduisait dans le cas d'un gaz idéal à l'équation :  $pv^\gamma = cte$  d'où :

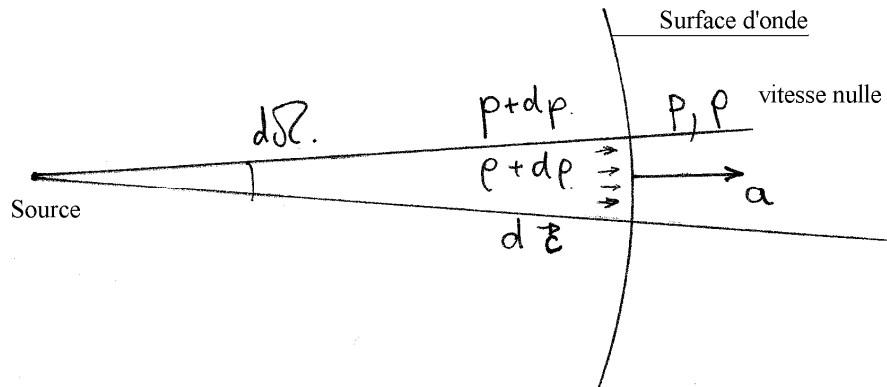
$$\boxed{\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$$

Attention : Cette équation n'est valable que dans le cas où l'écoulement est **adiabatique et réversible et pour un gaz parfait**, contrairement aux équations I-1 à I-4.

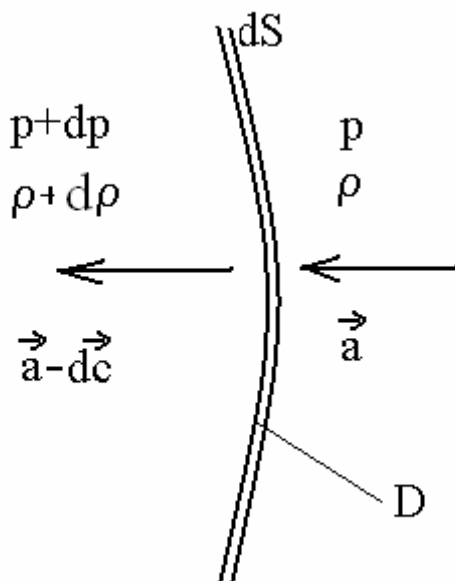
## II Vitesse du son et nombre de Mach

### II-1 Démonstration.

Envisageons la propagation d'une petite perturbation élémentaire de pression (son) se déplaçant dans un fluide au repos.



Pour plus de facilité, nous prendrons le repère sur la surface d'onde et se déplaçant avec elle. Dans ce repère, on écrit le PCM et le PFD :



#### PCM :

$$dS\rho a = dS(\rho + d\rho)(a - dc)$$

Donc en développant :

$$\rho a = \rho a + a d\rho - \rho dc - dc d\rho$$

Et en ne conservant que le premier ordre :

$$a d\rho = \rho dc \quad (1)$$

#### PFD :

$$\Sigma F_{ext \rightarrow D} = (p + dp)dS - pdS = qm(a - (a - dc)) = \rho a dS dc$$

Donc en simplifiant:  $dp = \rho a dc$

En utilisant l'équation (1) :

$$dp = \frac{\rho a^2 d\rho}{\rho} = a^2 d\rho \rightarrow a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$$

Dans le cas d'un gaz idéal et pour une perturbation infinitésimale, le déplacement de l'onde est isentropique donc  $pv^\gamma = cte$  et en différenciant, on obtient :  $\frac{dp}{d\rho} = \gamma \frac{p}{\rho} = \gamma T$  donc finalement :

$$a = \sqrt{\gamma T}$$

AN : pour l'air à 15°C  $a \approx 340 \text{ m/s}$  (1224 km/h). **Attention** : T est obligatoirement en °K.

Pour « Concorde » volant dans la stratosphère (altitude supérieure à 10km), la température est de  $-56,5^{\circ}\text{C}$  c'est-à-dire 216,5K la vitesse du son est donc de 295m/s (1062km/h). Mach 2 correspond à 2124km/h.

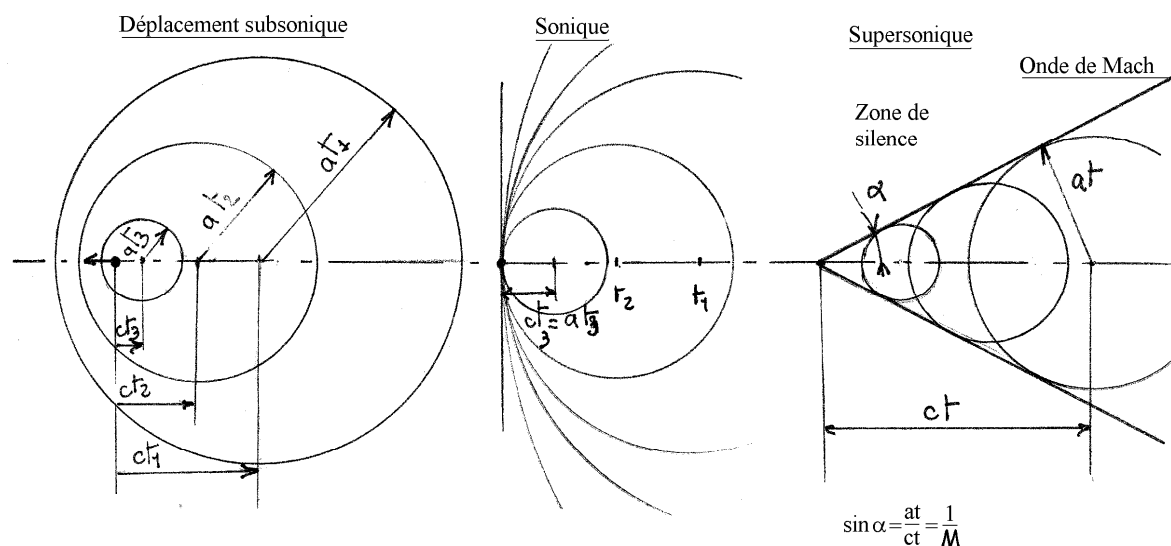
## II-2 Nombre de Mach et différents régimes d'écoulement

Par définition le nombre de mach est  $M = \frac{c}{a}$

La valeur de ce nombre est fondamentale pour les écoulements compressibles. Selon qu'il est supérieur (régime supersonique) ou inférieur à 1 (régime subsonique), la nature de l'écoulement ou plus exactement le comportement du fluide va être fondamentalement différent.

Dans le cas d'un écoulement interne débouchant dans un réservoir par exemple. Si en régime subsonique la pression du réservoir change la vitesse d'écoulement va varier en fonction de cette pression (augmenter si la pression diminue et vice-versa). En régime supersonique, les « ondes de pressions » qui se déplacent à la vitesse du son ne peuvent pas remonter et l'écoulement dans le tuyau reste invariable quelque soit la pression en aval. Voir § III-5 l'amorçage d'une tuyère.

Considérons maintenant un mobile se déplaçant de droite à gauche à une vitesse  $c$  donc à un nombre de Mach  $M = \frac{c}{a}$  :



En **régime subsonique**, le fluide en amont du mobile reçoit les ondes de pression avant l'arrivée du mobile et peut donc s'écarter continûment au fur et à mesure de l'approche.

En **supersonique**, le fluide en amont du cône sonique n'est pas prévenu de l'approche (zone de silence) et ne peut donc s'écarter que brutalement (choc) au passage de l'onde : cette différence entre les écoulements est fondamentale. Les lignes de courant, les répartitions des pressions... seront radicalement modifiées.

On voit donc que la nature « compressible » d'un fluide dépend de la vitesse dont il est animé. La confirmation de ce fait sera largement développée dans les paragraphes suivants.

### III Ecoulement isentropique (sans viscosité ni onde de choc)

#### III-1 Etat générateur, équation de Barré de Saint Venant

L'état **générateur** est l'état du fluide lorsque sa **vitesse est nulle**. Par exemple : les conditions régnant dans le réservoir alimentant une tuyère, au point d'arrêt isentropique ... Aux grandeurs caractérisant cet état nous affecterons l'indice 0 :  $p_0, \rho_0, T_0, h_0, C_0$ ... Cet état peut-être fictif, il n'est là que pour simplifier les calculs.

On peut ainsi réécrire l'équation du §I-3, la conservation de l'enthalpie totale, en utilisant l'hypothèse de gaz parfait :

$$C_p T + \frac{1}{2} C^2 = C_p T_0 \text{ devient : } 1 + \frac{1}{2} \frac{C^2}{C_p T} = \frac{T_0}{T}$$

En utilisant l'équation de Mayer  $C_p = \frac{\gamma}{\gamma-1} R$ , l'expression de la vitesse du son calculée au §II-1 :  $a = \sqrt{\gamma R T}$  et les relations qui lient les grandeurs thermodynamiques en écoulement isentropique  $\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ , on obtient l'équation suivante :

$$\boxed{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 = \frac{T_0}{T} = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Cette équation porte le nom d'équation de Barré de Saint Venant (BSV). Les tables en annexe à la fin de ce cours donnent, entre autre, les résultats numériques de cette équation pour  $\gamma=1,405$ .

#### III-2 Etat critique et vitesse limite

##### a) Etat critique

L'état d'un fluide en un point où la vitesse est sonique est appelé « état critique » et noté « c ». Il est facile de calculer les caractéristiques de cet état grâce à l'équation de BSV en reportant dans cette équation  $M=1$  :

$$\boxed{\frac{T_0}{T_c} = \left(\frac{\rho_0}{\rho_c}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{p_0}{p_c}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{\gamma+1}{2}}$$

$$\frac{a_0}{a_c} = \sqrt{\frac{T_0}{T_c}} = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}$$

AN : pour l'air  $\gamma=1,405$  d'où :

$$\frac{T_c}{T_0} = 0,8316, \quad \frac{a_c}{a_0} = 0,912, \quad \frac{p_c}{p_0} = 0,5275, \quad \frac{\rho_c}{\rho_0} = 0,6343$$

### b) Vitesse limite :

La vitesse limite d'un écoulement compressible est atteinte lorsque la détente est poussée jusqu'à  $p=0$  donc  $T=0$ . L'équation de conservation de l'enthalpie totale devient :

$$\frac{1}{2}C_L^2 = CpT_0 \Rightarrow C_L = \sqrt{2CpT_0}$$

Cette vitesse est intéressante à plusieurs titres :

Elle est déjà la vitesse maximum que peuvent atteindre les gaz d'échappement d'une fusée dans le vide, elle conditionne donc la **poussée maxi des moteurs de fusée**.

D'autre part, d'un point de vue de la théorie cinétique des gaz, **cette vitesse représente la vitesse désordonnée des molécules dans le gaz**. En effet, lorsque l'on détend le gaz sans perte d'énergie jusqu'à une pression et température nulle : l'énergie cinétique des molécules l'une par rapport à l'autre devient alors nulle. L'énergie cinétique de l'ensemble des molécules fixes l'une par rapport à l'autre est égale à l'énergie avant la détente donc à l'énergie cinétique désordonnée des molécules dans le gaz (hypothèse de gaz parfait).

### III-3 Barré de Saint Venant – Bernoulli

Nous avons vu que l'équation de Barré de Saint Venant est l'équation de conservation de l'énergie pour un fluide compressible comme l'est l'équation de Bernoulli pour les fluides incompressibles. On peut se demander à partir de quand on doit utiliser l'équation de BSV à la place de celle de Bernoulli. Pour cela nous allons montrer que l'équation de Bernoulli peut être considérée comme un développement limité d'ordre un de BSV. De l'équation du §III-1 on tire :

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Nous rappelons que :  $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + O(x^3)$  où  $O(x^3)$  est un terme petit d'ordre 3.

Donc en posant  $x = \frac{\gamma-1}{\gamma}M^2$  et  $n = \frac{\gamma}{\gamma-1}$  et en reportant dans l'équation de BSV, on obtient :

$$\frac{p_0}{p} = 1 + \frac{\gamma}{2}M^2 + \frac{\gamma}{8}M^4 + O(M^6)$$

En multipliant par  $p$  et en factorisant par  $\frac{\gamma}{2}M^2$  on obtient :

$$p_0 - p = \frac{1}{2} p \gamma M^2 \left(1 + \frac{M^2}{4} + O(M^4)\right)$$

$$\text{Or : } \frac{1}{2} p \gamma M^2 = \frac{1}{2} p \gamma \frac{C^2}{a^2} = \frac{1}{2} \frac{p \gamma}{\gamma T} C^2 = \frac{1}{2} \rho C^2$$

$$\text{D'où : } \boxed{p_0 - p = \frac{1}{2} \rho C^2 \left(1 + \frac{M^2}{4} + O(M^4)\right)}$$

L'équation de Bernoulli se présente donc comme un développement au premier ordre de l'équation de BSV avec un coefficient d'erreur égal à  $\frac{M^2}{4}$  qui vaut 1% pour  $M=0,2$  et 6% pour  $M=0,5$ .

Au-delà de  $M=0,7$  et même si l'erreur sur le calcul de la pression est relativement faible, le fluide doit être considéré comme compressible car des passages locaux en supersonique peuvent affecter l'écoulement complet par les ondes de choc qui se produisent localement.

### III-4 Théorème d'Hugoniot

Le problème est ici de déterminer les caractéristiques de l'écoulement à un endroit quelconque d'une tuyère dont on connaît l'évolution de la section. En utilisant le PCM et les équations de BSV :

$$\rho_1 S_1 C_1 = \rho_2 S_2 C_2$$

$$\text{D'où : } \frac{S_1}{S_2} = \frac{\rho_2 C_2}{\rho_1 C_1} = \frac{\rho_2 M_2 a_2}{\rho_1 M_1 a_1} = \frac{M_2}{M_1} \sqrt{\frac{T_2}{T_1} \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}} = \frac{M_2}{M_1} \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

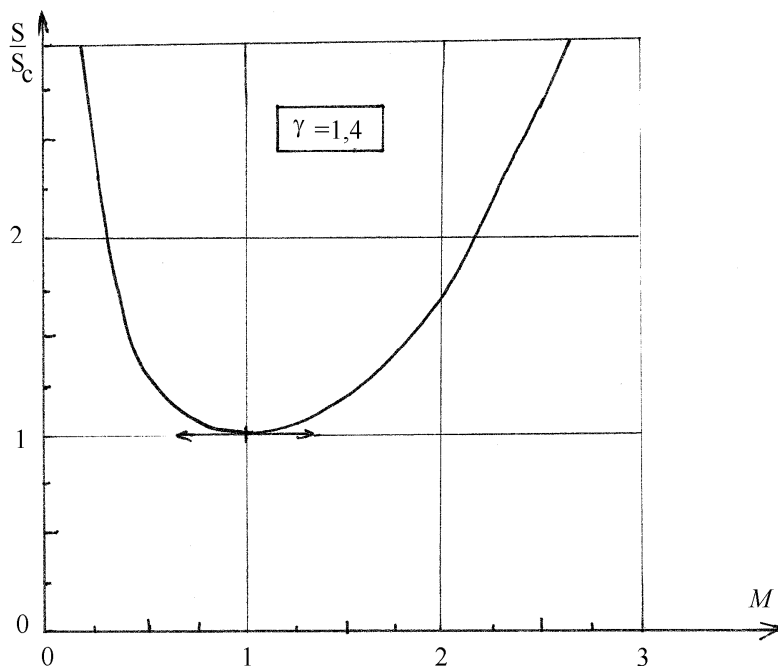
$$\text{Or BSV s'écrit : } 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 = \frac{T_0}{T}$$

$$\text{Donc finalement : } \frac{S_1}{S_2} = \frac{M_2}{M_1} \left( \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

En utilisant l'état critique « c » (on fait  $M_2=1$  et  $M_1=M$ ), on obtient :

$$\boxed{\frac{S}{S_c} = \frac{1}{M} \left( \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

Cette équation est appelée « théorème d'Hugoniot ». Comme pour l'équation de BSV, les tables en annexe donnent les valeurs numériques.



$S_C$  est la section critique, nous verrons qu'elle correspond aussi à la section du col de la tuyère lorsque celle-ci est « amorcée » (voir plus loin)

Sur le diagramme ci-contre, nous traçons la fonction précédente. On peut tirer les conclusions suivantes (voir fig) :

- En subsonique : lorsque la section décroît, la vitesse augmente et inversement. Le résultat est conforme à celui de la mécanique des fluides incompressible

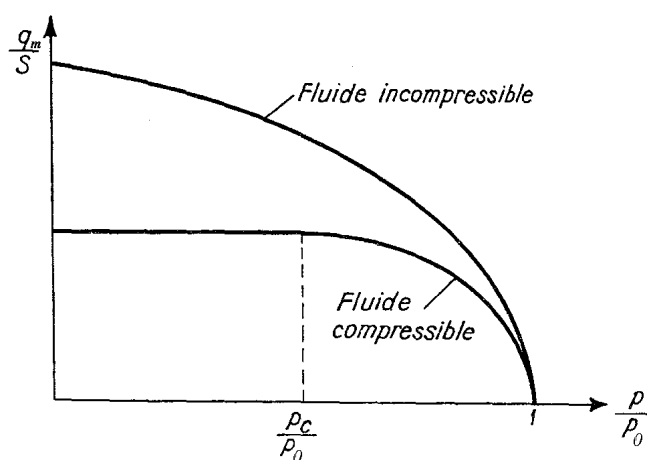
- Par contre, en supersonique, la vitesse augmente si la section augmente.

- Pour passer de subsonique en supersonique, il faut donc que la tuyère présente une section minimale appelée « col ». Dans le cas où la tuyère est « amorcée », c'est-à-dire que l'écoulement est supersonique à un endroit, **les conditions au col sont les conditions critiques**. Dans ce cas le débit de la tuyère ne dépend plus des conditions avals (l'onde de pression ne peut pas remonter l'écoulement supersonique) :

- Ce phénomène est appelé « phénomène d'étranglement ».

Le débit « d'étranglement » vaut :

$$qm_e = \rho_c S_c C_c = \rho_0 S_c a_0 \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}$$



Il ne dépend plus que des conditions génératrices et de la section du col. Cette caractéristique est utilisée pour les réacteurs ou les fusées pour réguler leur fonctionnement.

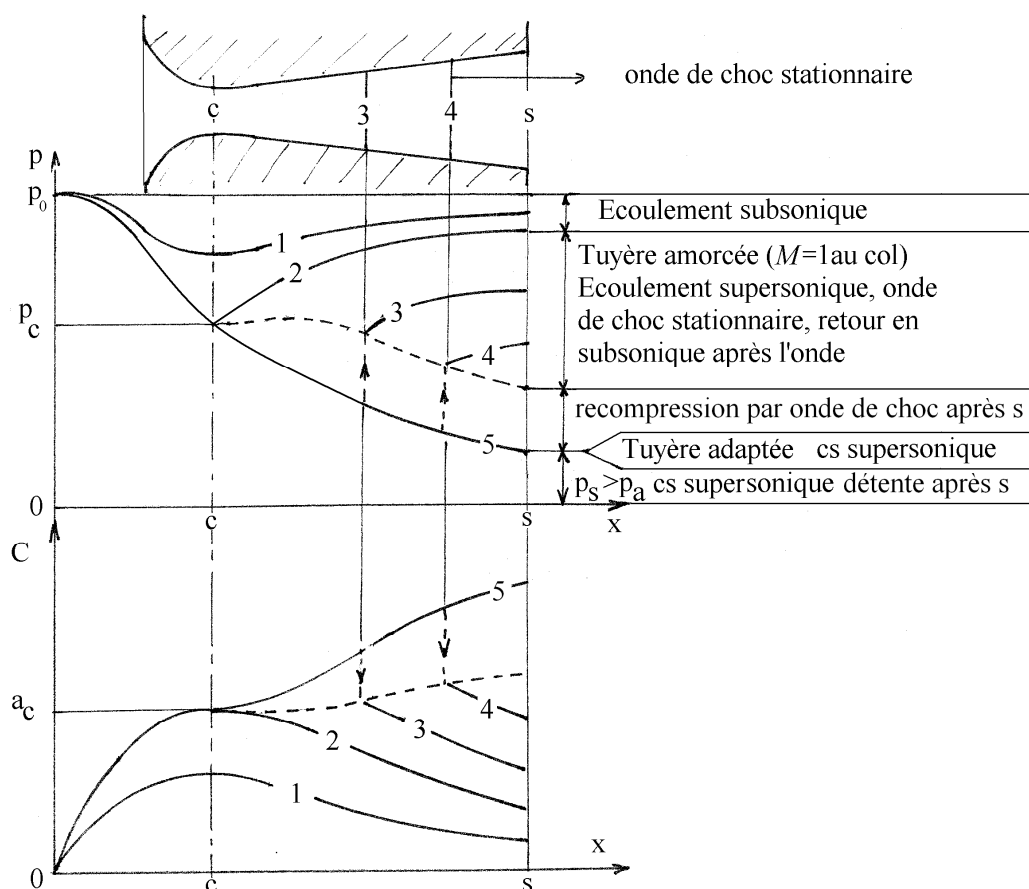
- Le retour en subsonique ne peut s'effectuer que par un col ou, nous verrons plus loin, par une onde de choc.

### III-5 Amorçage d'une tuyère

Nous schématisons ci-dessous l'évolution des pressions et des vitesses dans



les différents cas que l'on peut rencontrer dans une tuyère convergente divergente (tuyère de Laval).



Pour faciliter la compréhension du phénomène, nous supposons que les conditions génératrices sont conservées constantes et que les conditions avals changent.

Tant que la tuyère est entièrement subsonique (non amorcée, cas 1) les conditions avals modifient entièrement l'écoulement dans la tuyère car les ondes de pression peuvent remonter le courant.

Dès que la tuyère est amorcée, les ondes de pression ne peuvent plus remonter la partie supersonique de l'écoulement qui « isole » l'amont des conditions avals. Si l'écoulement était entièrement supersonique, la pression de sortie deviendrait inférieure à la pression ambiante : la section croissant, le nombre de Mach croîtrait aussi inéluctablement et la pression diminuerait tout au long de la tuyère vers l'aval indépendamment de la pression ambiante. Le jet se ferait alors « écraser » par la pression ambiante et une onde de choc remonterait le courant jusqu'à se stabiliser à un endroit tel que la pression de sortie soit à nouveau égale à la pression ambiante (cas 3 et 4).

Contrairement aux ondes élémentaires de pression, les ondes de choc se déplacent à vitesse supersonique d'autant plus vite que la discontinuité de pression est importante. Nous verrons que l'écoulement après l'onde de choc est forcément subsonique.

## IV Notions d'onde de choc

### IV-1 Onde de choc droite stationnaire

Les conditions génératrices sont différentes de part et d'autre de l'onde de choc et seront indicées : « 01 » et « 02 ». Ecrivons les principes :

$$\begin{array}{c|c} \vec{C}_1 & \vec{C}_2 \\ \hline \longrightarrow & \longrightarrow \\ p_1, \rho_1, T_1 & p_2, \rho_2, T_2 \end{array}$$

Onde de choc droite stationnaire

**PCM** :  $\rho_1 C_1 = \rho_2 C_2$

**PFD** : Pour un petit domaine entourant l'onde de choc, on peut écrire en projetant sur un axe parallèle aux vitesses et dans le même sens, que :

$$\sum F_{ext \rightarrow D} = (p_1 - p_2)S = qm(C_2 - C_1) = (\rho_2 C_2^2 - \rho_1 C_1^2)S$$

$$\text{Donc } p_1 + \rho_1 C_1^2 = p_2 + \rho_2 C_2^2$$

$$\mathbf{1^{er} principe} : CpT_1 + \frac{C_1^2}{2} = CpT_2 + \frac{C_2^2}{2} = CpT_{01} = CpT_{02}$$

**Attention** : ici, comme nous le verrons plus loin, l'écoulement n'est pas isentropique donc il n'y a pas de relation simple entre pression, masse volumique et température.

Si connaissant les conditions 1 amont du choc, nous recherchons les conditions 2 en aval, nous avons 4 inconnues et 4 équations : les trois précédentes et l'équation du gaz parfait qui lie  $p_2, \rho_2, T_2$ .

Grâce à ces équations, nous obtenons les équations du choc ci-dessous. La démonstration est longue et fastidieuse. Vous pouvez la trouver sur les livres de mécanique des fluides, en particulier « Mécanique des fluides de Ouziaux et Perrier aux éditions Dunod » en bibliothèque de l'IUT:

Equation de Prandtl :  $\boxed{C_1 C_2 = a_c^2}$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{\frac{\gamma+1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} \quad ; \quad \frac{P_2}{P_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$$

Par l'équation des gaz parfait :  $\frac{T_2}{T_1} = \frac{\rho_1 P_2}{\rho_2 P_1}$

Et finalement : 
$$M_2^2 = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{\gamma M_1^2 - \frac{\gamma-1}{2}}$$

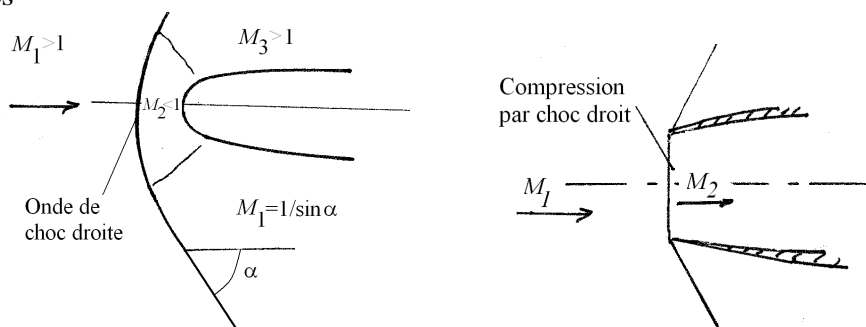
On montre par cette équation que comme  $M_1$  est toujours  $>1$ ,  $M_2$  est toujours  $<1$

Ces équations comme celles de BSV et d'Hugoniot sont assez délicates à manipuler et en particulier à inverser. Nous fournissons, en annexe à la fin de ce cours, les tables tirées de ces équations pour  $\gamma=1,405$  plus faciles à manipuler.

### IV-2 Exemples d'écoulements avec choc

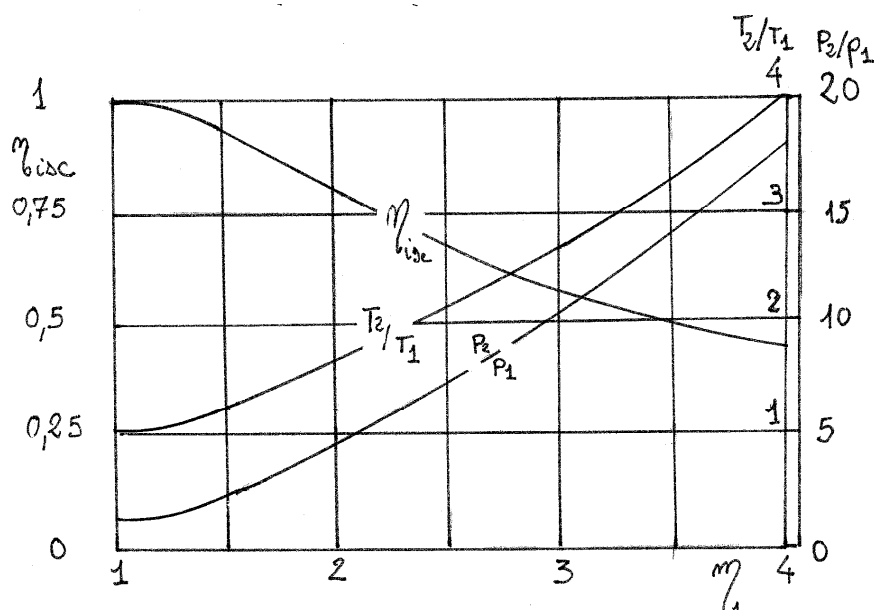
- Nous avons vu à la fin du paragraphe précédent le cas des tuyères amorcées non adaptées. Une onde de choc droite stationnaire s'établi alors à un endroit tel que la pression de sortie soit égale à la pression ambiante

- Ecoulements externes autour d'un bord d'attaque ou l'ogive d'un projectile, d'un avion ou d'une navette spatiale ... en régime supersonique. Prises d'air des premiers avions supersoniques



On peut chercher le rendement isentropique de l'onde de choc.

Il est donné par l'équation (voir cours de thermodynamique):



$$\eta_{is} = \frac{\frac{T_{2is}}{T_1} - 1}{\frac{T_2}{T_1} - 1}$$

avec 
$$\frac{T_{2is}}{T_1} = \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

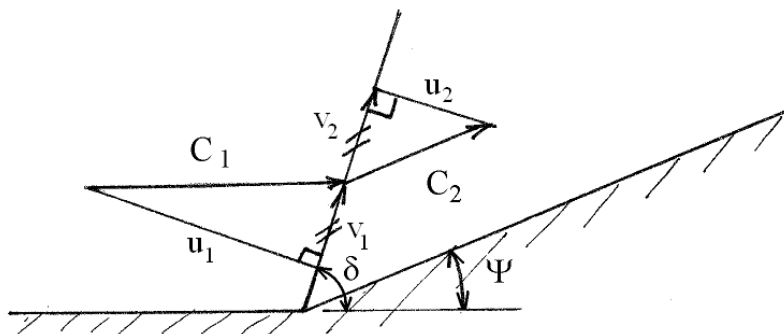
En reportant les équations du paragraphe précédent dans ces équations on obtient les courbes ci-contre.

### Commentaires :

- Au-delà de  $M=2$  le rendement isentropique devient très faible. Nous verrons qu'il est préférable de recourir à des ondes de choc oblique.
- On peut obtenir des taux de compression très élevés par onde de choc.
- A partir de  $M=3$  l'échauffement des bords d'attaque ( $T=1200^\circ\text{K}$ ) contraint à utiliser des matériaux réfractaires.
- **L'onde de choc droite est très dissipative au-delà de  $M=2$ .**

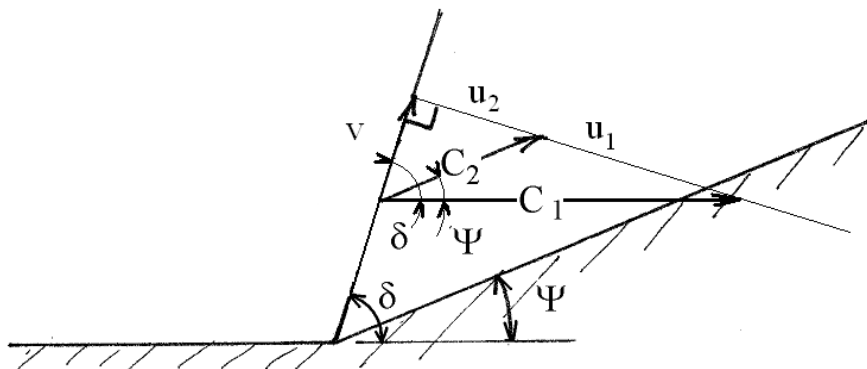
### IV-3 Onde de choc oblique

La figure ci-dessous représente un écoulement supersonique autour d'un dièdre provoquant une onde de choc oblique.



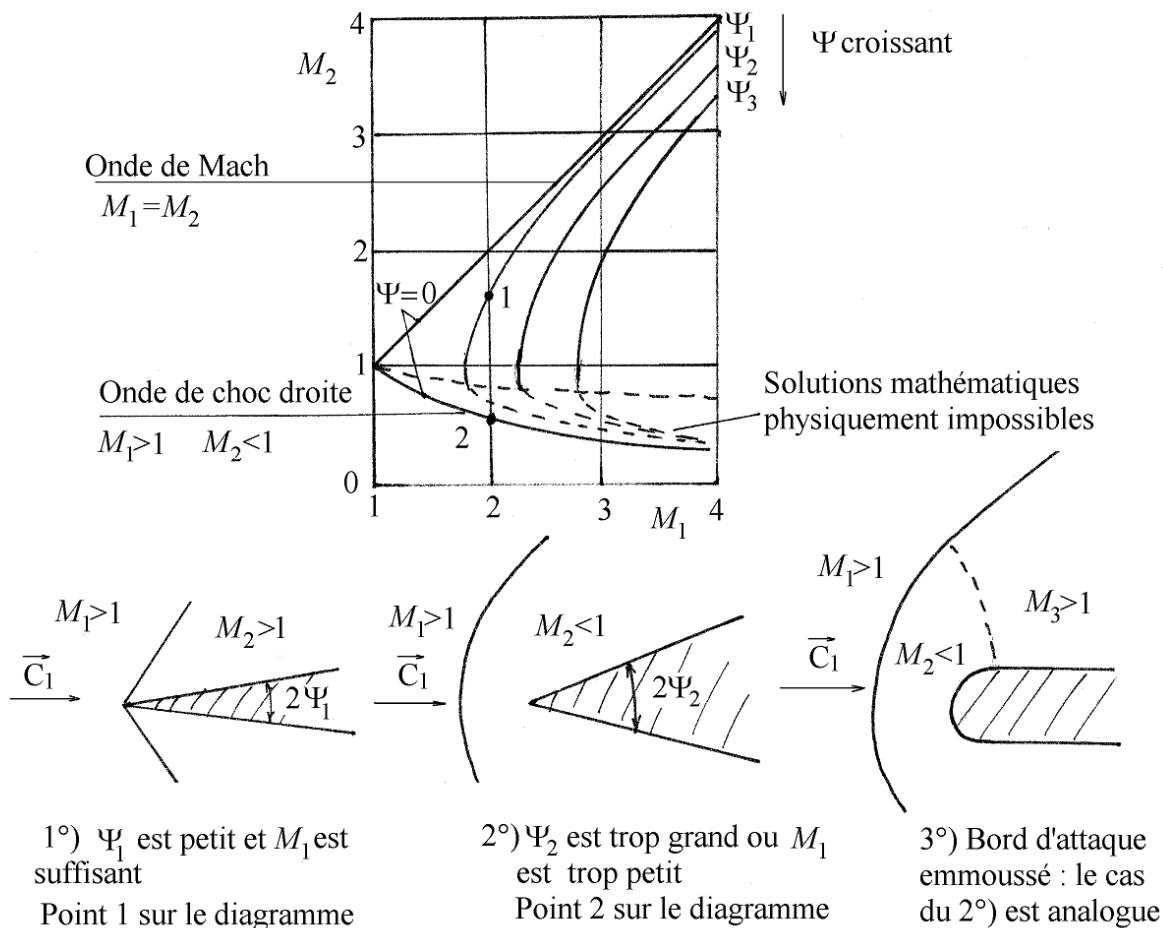
Comme pour l'onde de choc droite, pour calculer les grandeurs après le choc, on écrit les principes. Le PFD donne cette fois deux équations en projetant le vecteur vitesse sur l'onde de choc et sur la normale à celle-ci. La projection sur l'onde s'écrit :  $qm(v_1 - v_2) = 0$  car il n'y a pas de forces dans cette direction, donc  $v_1 = v_2 = v$ . Les autres équations sont identiques aux équations de l'onde droite. Ainsi, les grandeurs à l'aval du choc oblique sont obtenues en remplaçant la vitesse amont par la projection de celle-ci sur la normale à l'onde de choc  $u_1 = C_1 \cdot \sin \delta$ .

La trigonométrie nous donne une relation simple entre  $\delta$  et  $\psi$  que la figure ci-dessous démontre :



On peut écrire :  $tg(\delta) = \frac{u_1}{v}$  et  $tg(\delta - \psi) = \frac{u_2}{v}$ . Donc :  $\frac{tg(\delta)}{tg(\delta - \psi)} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$ .

La figure ci-dessous donne le nombre de Mach aval en fonction du nombre de Mach amont et de l'angle de dièdre  $\psi$ . On voit qu'il existe une déviation maximum  $\psi_m$  donnant une onde oblique pour un nombre de Mach amont donné.



Par exemple, pour  $M_1=2$  et  $\psi=\psi_1$ , il existe une solution d'onde de choc oblique représentée par le point 1 telle que  $M_2=1,6$  : cas 1°). Par contre, toujours à Mach 2 si  $\psi=\psi_2$  alors la seule solution est subsonique : concrètement l'onde est détachée vers l'avant et se comporte comme un choc droit : cas 2°) comme pour le bord d'attaque émoussé : cas 3°).

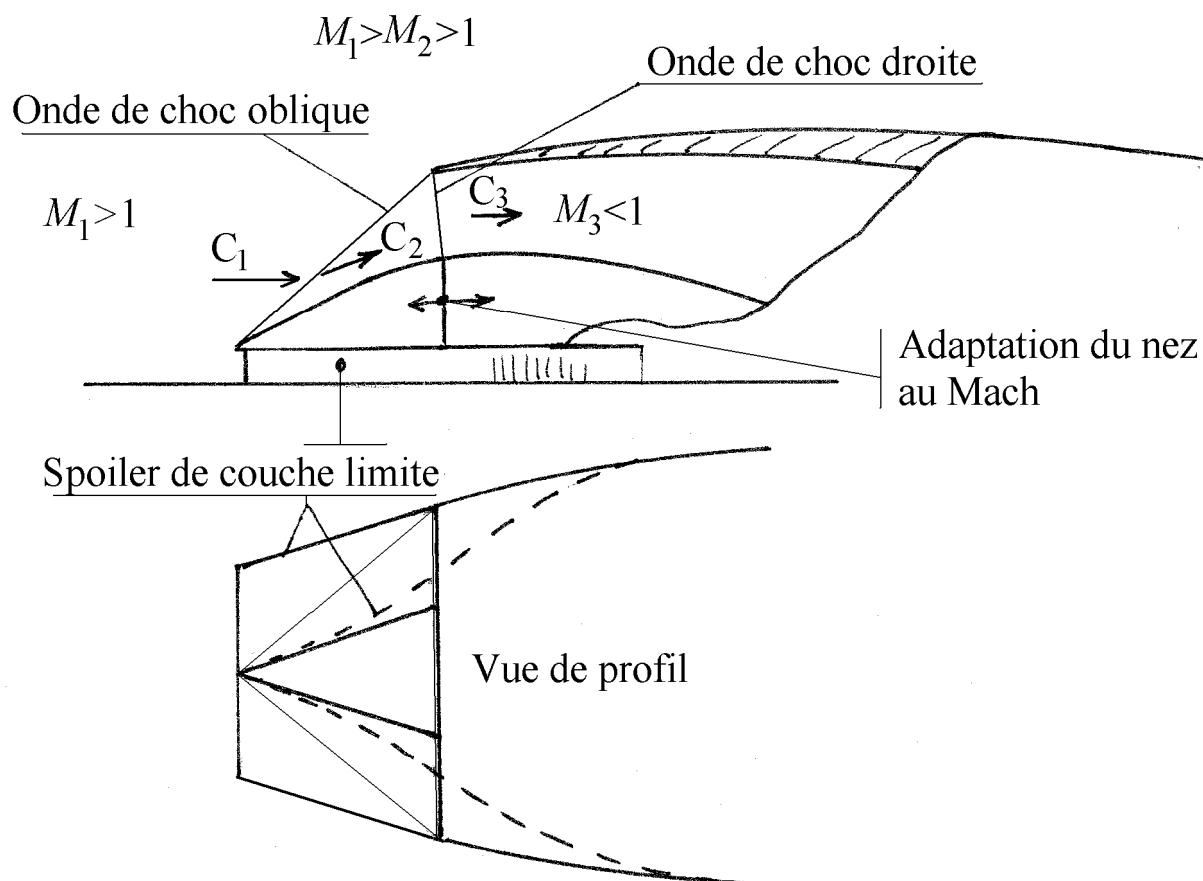
Le tableau ci-dessous donne l'angle de déviation maximum en fonction du nombre de Mach amont :

$M_1$	1,2	1,4	1,8	2,4	3,8	4,5	$\infty$
$\psi_m$	4°	9°30'	19	28°30'	38°	40°	45°20'

Du point de vue du rendement, tout ce passe comme si le choc oblique était un choc droit à Mach réduit  $M_1 \cdot \sin \delta$ . Le rendement d'une onde de choc oblique est donc très supérieur à celui d'une onde de choc droite car le ralentissement au passage de l'onde de choc est moindre (voir fig. bas de p.12). C'est pourquoi les avions supersoniques ont leurs ogives

et leurs bords d'attaque d'aile et de prise d'air très acérés. Cela permet de former une onde oblique même à un nombre de Mach relativement faible.

Pour exemple, la figure ci-dessous montre le fonctionnement d'une prise d'air d'avion supersonique.



## Annexe : tables des écoulements compressibles ( $\gamma=1,405$ )

(Source : « Mécanique des fluides de Ouziaux et Perrier, éditions Dunod Université »)

$\mathcal{M}$	$\frac{p}{p_0}$	$\frac{\rho}{\rho_0}$	$\frac{T}{T_0}$	$\frac{S}{S_c}$	$c$ ( $T_0 = 288 \text{ °K}$ )
0,10	0,993 0	0,995	0,998 0	5,820	33,4
0,11	0,991 6	0,994	0,997 5	5,303	36,9
0,12	0,990 0	0,993	0,997 0	4,870	40,4
0,13	0,988 3	0,992	0,996 5	4,503	43,8
0,14	0,986 4	0,991	0,995 9	4,188	47,2
0,15	0,984 4	0,990	0,995 3	3,915	50,6
0,16	0,982 3	0,988	0,994 7	3,676	54,0
0,17	0,980 0	0,986	0,994 1	3,465	57,4
0,18	0,977 6	0,984	0,933 4	3,278	60,8
0,19	0,975 1	0,982	0,992 7	3,111	64,2
0,20	0,972 4	0,980	0,992 0	2,961	67,6
0,21	0,969 6	0,978	0,991 2	2,826	71,0
0,22	0,966 7	0,976	0,990 3	2,704	74,4
0,23	0,963 7	0,974	0,989 4	2,594	77,8
0,24	0,960 6	0,972	0,988 5	2,494	81,2
0,25	0,957 3	0,970	0,987 5	2,402	84,6
0,26	0,953 9	0,968	0,986 5	2,317	87,9
0,27	0,950 4	0,965	0,985 4	2,238	91,2
0,28	0,946 8	0,962	0,984 3	2,165	94,5
0,29	0,943 1	0,959	0,983 2	2,097	97,8
0,30	0,939 3	0,956	0,982 0	2,034	101,1
0,31	0,935 4	0,953	0,980 8	1,975	104,4
0,32	0,931 4	0,950	0,979 6	1,920	107,7
0,33	0,927 2	0,947	0,978 4	1,869	111,0
0,34	0,922 9	0,944	0,977 1	1,821	114,3
0,35	0,918 5	0,941	0,975 8	1,776	117,6
0,36	0,914 0	0,938	0,974 4	1,734	120,9
0,37	0,909 5	0,935	0,973 0	1,695	124,2
0,38	0,904 9	0,932	0,971 6	1,658	127,5
0,39	0,900 2	0,928	0,970 1	1,623	130,7
0,40	0,895 3	0,924	0,968 6	1,590	133,9
0,41	0,890 4	0,920	0,967 0	1,559	137,1
0,42	0,885 4	0,916	0,965 4	1,529	140,3
0,43	0,880 3	0,912	0,963 8	1,501	143,5
0,44	0,875 1	0,908	0,962 2	1,474	146,7
0,45	0,869,9	0,904	0,960 5	1,448	149,9
0,46	0,864 6	0,900	0,958 8	1,424	153,1
0,47	0,859 2	0,896	0,957 1	1,401	156,3
0,48	0,853 7	0,892	0,955 4	1,379	159,5
0,49	0,848 1	0,888	0,953 6	1,359	162,7
0,50	0,842 5	0,884	0,951 8	1,340	165,9
0,51	0,836 8	0,880	0,950 0	1,322	169,1
0,52	0,831 1	0,876	0,948 1	1,304	172,2
0,53	0,825 3	0,872	0,946 2	1,287	175,3
0,54	0,819 5	0,868	0,944 3	1,271	178,4
0,55	0,813 6	0,864	0,942 3	1,255	181,5

$\mathcal{M}$	$\frac{p}{p_0}$	$\frac{\rho}{\rho_0}$	$\frac{T}{T_0}$	$\frac{S}{S_c}$	$c$ ( $T_0 = 288 \text{ }^\circ\text{K}$ )
0,56	0,807 7	0,860	0,940 3	1,240 0	184,6
0,57	0,801 7	0,856	0,938 3	1,226 0	187,7
0,58	0,795 6	0,851	0,936 3	1,212 6	190,8
0,59	0,789 5	0,846	0,934 2	1,199 8	193,9
0,60	0,783 4	0,841	0,932 1	1,187 6	197,0
0,61	0,777 2	0,836	0,930 0	1,176 0	200,0
0,62	0,771 0	0,831	0,927 9	1,165 0	203,0
0,63	0,764 8	0,826	0,925 8	1,154 5	206,0
0,64	0,758 5	0,821	0,923 6	1,144 5	209,0
0,65	0,752 2	0,816	0,921 4	1,135 0	212,0
0,66	0,745 9	0,811	0,919 2	1,125 9	215,0
0,67	0,739 5	0,806	0,916 9	1,117 3	218,0
0,68	0,733 1	0,801	0,914 6	1,109 1	221,0
0,69	0,726 7	0,796	0,912 3	1,101 3	224,0
0,70	0,720 2	0,791	0,909 9	1,093 9	227,0
0,71	0,713 8	0,786	0,907 5	1,086 9	229,9
0,72	0,707 3	0,781	0,905 1	1,080 3	232,8
0,73	0,700 8	0,776	0,902 7	1,074 0	235,7
0,74	0,694 3	0,771	0,900 3	1,068 0	238,6
0,75	0,687 8	0,766	0,897 9	1,062 3	241,5
0,76	0,681 3	0,761	0,895 4	1,056 9	244,4
0,77	0,674 8	0,756	0,892 9	1,051 8	247,3
0,78	0,668 3	0,751	0,890 4	1,047 0	250,2
0,79	0,661 8	0,746	0,887 9	1,042 5	253,1
0,80	0,655 3	0,741	0,885 4	1,038 2	255,9
0,81	0,649	0,736	0,882 8	1,034 2	258,7
0,82	0,642	0,730	0,880 2	1,030 4	261,5
0,83	0,636	0,724	0,877 6	1,026 9	264,3
0,84	0,629	0,718	0,875 0	1,023 7	267,1
0,85	0,623	0,712	0,872 4	1,020 7	269,9
0,86	0,616	0,707	0,869 8	1,017 9	272,7
0,87	0,610	0,702	0,867 2	1,015 3	275,5
0,88	0,603	0,697	0,864 5	1,012 9	278,3
0,89	0,597	0,692	0,861 7	1,010 7	281,0
0,90	0,590	0,687	0,859 0	1,008 7	283,7
0,91	0,584	0,681	0,856 3	1,006 9	286,4
0,92	0,577	0,675	0,853 6	1,005 4	289,1
0,93	0,571	0,670	0,850 9	1,004 1	291,8
0,94	0,565	0,665	0,848 2	1,003 0	294,5
0,95	0,559	0,660	0,845 4	1,002 1	297,2
0,96	0,553	0,655	0,842 7	1,001 4	299,9
0,97	0,547	0,650	0,839 9	1,000 8	302,5
0,98	0,540	0,645	0,837 2	1,000 4	305,1
0,99	0,534	0,640	0,834 4	1,000 2	307,7
1,00	0,528	0,635	0,831 6	1,000 0	310,3



$\mathcal{M}$	$\frac{p}{p_0}$	$\frac{p'_0}{p_0}$	$\frac{p_2}{p_1}$	$\frac{\rho}{\rho_0}$	$\frac{\rho_2}{\rho_1}$	$\frac{T}{T_0}$	$\frac{S}{S_c}$	$c$ ( $T_0 = 288 \text{ }^\circ\text{K}$ )
1,00	0,527 5	1,000 00	1,000	0,634 3	1,000 0	0,831 6	1,000 0	310,3
1,01	0,521 3	0,999 99	1,023	0,629 0	1,016 7	0,828 8	1,000 2	312,9
1,02	0,515 2	0,999 98	1,047	0,623 7	1,033 4	0,826 0	1,000 5	315,5
1,03	0,509 1	0,999 94	1,071	0,618 4	1,050 1	0,823 1	1,000 9	318,0
1,04	0,503 0	0,999 88	1,095	0,613 2	1,066 9	0,820 3	1,001 5	320,6
1,05	0,497 0	0,999 8	1,119	0,608 0	1,083 7	0,817 5	1,002 2	323,1
1,06	0,491 0	0,999 7	1,144	0,602 8	1,100 6	0,814 6	1,003 1	325,6
1,07	0,485 1	0,999 5	1,169	0,597 6	1,117 5	0,811 8	1,004 1	328,1
1,08	0,479 2	0,999 4	1,194	0,592 4	1,134 5	0,808 9	1,005 2	330,6
1,09	0,473 3	0,999 2	1,219	0,587 2	1,151 5	0,806 1	1,006 5	333,1
1,10	0,467 5	0,998 9	1,245	0,582 1	1,168 5	0,803 2	1,007 9	335,5
1,11	0,461 7	0,998 5	1,271	0,577 0	1,185 6	0,800 3	1,009 5	338,0
1,12	0,456 0	0,998 1	1,297	0,571 9	1,202 7	0,797 5	1,011 2	340,4
1,13	0,450 3	0,997 6	1,323	0,566 8	1,219 8	0,794 6	1,013 1	342,8
1,14	0,444 6	0,997 1	1,350	0,561 7	1,237 0	0,791 7	1,015 1	345,2
1,15	0,439 0	0,996 5	1,377	0,556 6	1,254 2	0,788 8	1,017 3	347,6
1,16	0,433 4	0,995 9	1,404	0,551 6	1,271 4	0,785 9	1,019 6	350,0
1,17	0,427 9	0,995 2	1,431	0,546 8	1,288 7	0,783 0	1,022 0	352,3
1,18	0,422 4	0,994 4	1,458	0,541 6	1,306 0	0,780 1	1,024 6	354,7
1,19	0,417 0	0,993 6	1,486	0,536 6	1,323 3	0,777 2	1,027 3	357,0
1,20	0,411 6	0,992 8	1,514	0,531 7	1,340 6	0,774 3	1,030 1	359,3
1,21	0,406 3	0,992	1,542	0,526 8	1,357 9	0,771 4	1,033 1	361,6
1,22	0,401 0	0,991	1,570	0,521 9	1,375 2	0,768 5	1,036 2	363,9
1,23	0,395 7	0,990	1,599	0,517 0	1,392 5	0,765 6	1,039 4	366,2
1,24	0,390 5	0,989	1,628	0,512 2	1,409 8	0,762 7	1,042 8	368,5
1,25	0,385 3	0,987	1,657	0,507 4	1,427 1	0,759 7	1,046 3	370,8
1,26	0,380 2	0,986	1,686	0,502 6	1,444 4	0,756 8	1,050 0	373,0
1,27	0,375 1	0,985	1,716	0,497 8	1,461 8	0,753 9	1,053 8	375,2
1,28	0,370 1	0,983	1,746	0,493 0	1,479 2	0,751 0	1,057 7	377,4
1,29	0,365 1	0,982	1,776	0,488 3	1,496 6	0,748 0	1,061 7	379,6
1,30	0,360 2	0,980	1,806	0,483 6	1,514 0	0,745 1	1,065 9	381,8
1,31	0,355 3	0,978	1,836	0,478 9	1,531 3	0,742 2	1,070 2	384,0
1,32	0,350 5	0,976	1,867	0,474 3	1,548 7	0,739 3	1,074 6	386,2
1,33	0,345 7	0,974	1,898	0,469 7	1,566 0	0,736 3	1,079 2	388,4
1,34	0,341 0	0,972	1,929	0,465 1	1,583 3	0,733 4	1,083 9	390,5
1,35	0,336 3	0,970	1,961	0,460 5	1,600 6	0,730 5	1,088 7	392,6
1,36	0,331 7	0,968	1,993	0,456 0	1,618 0	0,727 6	1,093 6	394,7
1,37	0,327 1	0,966	2,025	0,451 5	1,635 3	0,724 7	1,098 7	396,8
1,38	0,322 5	0,963	2,057	0,447 0	1,652 6	0,721 7	1,103 9	398,9
1,39	0,318 0	0,961	2,089	0,442 5	1,669 9	0,718 8	1,109 2	401,0

$\mathcal{M}$	$\frac{p}{p_0}$	$\frac{p'_0}{p_0}$	$\frac{p_2}{p_1}$	$\frac{\rho}{\rho_0}$	$\frac{\rho_2}{\rho_1}$	$\frac{T}{T_0}$	$\frac{S}{S_c}$	$c$ ( $T_0 = 288 \text{ °K}$ )
1,40	0,313 6	0,958	2,122	0,438 1	1,687 2	0,715 9	1,114 7	403,1
1,50	0,271 9	0,929	2,461	0,395 7	1,859	0,687 0	1,176	423
1,60	0,234 8	0,894	2,823	0,356 6	2,028	0,658 6	1,249	443
1,70	0,202 2	0,855	3,208	0,320 6	2,193	0,630 8	1,336	461
1,80	0,173 7	0,813	3,617	0,287 8	2,353	0,603 8	1,436	477
1,90	0,149 0	0,769	4,049	0,258 0	2,508	0,577 7	1,551	492
2,00	0,127 7	0,723	4,505	0,231 1	2,657	0,552 5	1,682	507
2,20	0,093 4	0,630	5,486	0,185 1	2,939	0,505 0	1,997	533
2,40	0,068 4	0,542	6,561	0,148 3	3,197	0,461 6	2,392	556
2,60	0,050 2	0,462	7,30	0,118 9	3,431	0,422 2	2,879	576
2,80	0,036 9	0,392	8,992	0,095 6	3,644	0,386 5	3,474	594
3,00	0,027 3	0,330	10,347	0,077 1	3,835	0,354 4	4,19	608
3,50	0,013 2	0,215	14,14	0,046 0	4,232	0,287 3	6,70	640
4,00	0,006 66	0,141	18,53	0,028 24	4,538	0,235 8	10,53	663
4,50	0,003 51	0,092 9	23,49	0,017 90	4,774	0,196 1	16,21	680
5,00	0,001 927	0,063 1	29,04	0,011 68	4,959	0,165 0	24,38	693
5,50	0,001 100	0,043 5	35,17	0,007 83	5,105	0,140 3	35,81	702
6,00	0,000 651	0,030 6	41,89	0,005 39	5,222	0,120 6	51,45	711
7,00	0,000 250	0,015 9	57,08	0,002 73	5,395	0,091 7	100,00	723
8,00	0,000 107	0,008 87	74,61	0,001 49	5,513	0,071 6	181,4	730

Les indices sont ceux utilisés dans le cours à savoir :

- « 0 » conditions génératrices
- « c » conditions critiques
- « 1 » et « 2 » conditions respectivement avant le choc droit et après le choc droit
- $p_0'$  désigne la pression génératrice après le choc.

# Sommaire du cours de mécanique des fluides compressibles de 2<sup>ème</sup> année GTE

## **I Rappels des Principes**

I-1 Principe de Conservation de la Masse (PCM)	Page 1
I-2 Principe Fondamental de la Dynamique (PFD), Euler	
I-3 1 <sup>er</sup> principe de la thermodynamique	
I-4 Equations de comportement	Page 2
I-5 2 <sup>ème</sup> principe de la thermo	

## **II Vitesse du son et nombre de Mach** Page 3

I-1 Vitesse du son	
I-2 Nombre de Mach et régimes d'écoulement	Page 4

## **III Ecoulement isentropique**

III-1 Etat générateur, équation de Barré de Saint Venant	
III-2 Etat critique et vitesse limite	Page 5
III-3 Barré de Saint Venant – Bernoulli	Page 6
III-4 Théorème d'Hugoniot	Page 7
III-5 Amorçage d'une tuyère	Page 9

## **IV Notion d'onde de choc**

IV-1 Onde droite de choc stationnaire	
IV-2 Exemples d'écoulement avec choc	Page 11
IV-3 Onde de choc oblique	Page 12

## **Annexe : Tables des écoulements compressibles** Page 14